2024年　東大数学　文系第2問 ①

(1)

$$5^n > 10^{19}$$

常用対数をとる ($\log_{10}$■)

$$\log_{10} 5^n > \log_{10} 10^{19}$$

$$n \log_{10} 5 > 19 \log_{10} 10$$　　$\log_{10} 10 = 1$

$$n > \frac{19}{\log_{10} 5}$$　数値計算

ここで、$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$　定番の変形

$= 1 - \log_{10} 2$　(与)不等式から計算

(与) $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$

$-0.31 < -\log_{10} 2 < -0.3$

$1-0.31 < 1-\log_{10} 2 < 1-0.3$

$0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$　$\log_{10} 5$ の概数

よって

$$\frac{19}{0.7} < \frac{19}{\log_{10} 5} < \frac{19}{0.69}$$

$$27.14\cdots < \frac{19}{\log_{10} 5} < 27.53\cdots$$

で、nは、$n > \frac{19}{\log_{10} 5}$ となる最小の自然数なので、

$n = 28$ //

Memo

$$n > \frac{19}{\log_{10} 5}$$

27.14…　27.53…

(2)

「≪」は、ここでは「メチャ大きい」の記号として使ってます。

Point　発散速度

① 関数の種類によって、数字が大きくなる速度がとても異なる

$\sin x$, $\cos x$ ≪ $\log_a x$ ≪ x^n ≪ a^x　(但し $a>1$)

例えば x に 1, 2, 3, … を代入していった場合、右の関数の方が圧倒的に大きくなる。

② 同じ関数でも、底や累乗が異なれば、速度がとても異なる。

$x^2 \ll x^3$,　$3^x \ll 4^x$

例えば、$3^5 = 243$　$3^6 = 729$　$4^5 = 1024$　$4^6 = 4096$ となる。

$5^m + 4^m > 10^{19}$ で、(1)の答えが28。
mに28あたりの整数を代入すると、発散速度の考えから、
$5^m \gg 4^m$ (5^mの方が圧倒的に大きい) となりそう。

つまり $5^m + 4^m > 10^{19}$ となるmにおいては
4^mは10^{19}を超えるのに、ほとんど貢献してない。

だから、$5^n > 10^{19}$ が $n=28$ なら、$5^m + 4^m > 10^{19}$ も $m=28$
なのでは？と予測

よって、$m=27$ で不成立　$5^{27} + 4^{27} < 10^{19}$ … ①
$m=28$ で成立　$5^{28} + 4^{28} > 10^{19}$ … ②
となることを示す。

こんな感じのことを考える。

$$5^{28} + 4^{28} > 5^{28} > 10^{19}$$　(∵ (1)の結論)

より $m=28$ では成立する。(② はOK)

$5^{27} + 4^{27} < 10^{19}$ となることを示す。

指数なので対数をとって、証明しよう。

$\log(5^m + 4^m)$ は $\log 5^m + \log 4^m$ とならないことに注意

2024年　東大数学　文系第2問 ②

$\log_{10} 4^{27} = 27 \log_{10} 4$
$= 27 \times \log_{10} 2^2$
$= 27 \times 2 \times \log_{10} 2$
$= 54 \times \log_{10} 2$ より

$54 \times 0.3 < \log 4^{27} < 54 \times 0.31$
$16.2 < \log 4^{27} < 16.74$

よって $10^{16.2} < 4^{27} < 10^{16.74}$

10^{19}より2桁以上小さい😊

(1)より $0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$

$\log_{10} 5^{27} = 27 \log_{10} 5$ より

$27 \times 0.69 < \log 5^{27} < 27 \times 0.7$

$18.63 < \log_{10} 5^{27} < 18.9$

$10^{18.63} < 5^{27} < 10^{18.9}$

$5^{27} + 4^{27} < 10^{18.9} + 10^{16.74}$ であり
10^{19}より小さいことが示せない
もう少し詳しく調べる

$\log_{10} 5^{27} < 18.9$
$= 18 + 0.9$
$= 18 + 3 \times 0.3$
$= 18 + 3 \times \log_{10} 2$
$= 18 + \log_{10} 8$

$\therefore 5^{27} < 10^{18.9}$
$= 10^{18 + \log_{10} 8}$
$= 10^{18} \times 10^{\log_{10} 8}$
$= 8 \times 10^{18}$

$a^{\log_a b} = b$
(対数の定義から当たり前)

よって $5^{27} + 4^{27}$
$< 8 \times 10^{18} + 10^{16.74}$
$< 8 \times 10^{18} + 10^{18}$
$< 9 \times 10^{18}$

10^{18}にくらべてとても小さい

$< 10^{19}$

わかりやすいと思ってこの2行を書きましたが
理解できているなら飛ばして
いきなり $< 10^{19}$ としてよい。

よって $\underline{M = 28}$